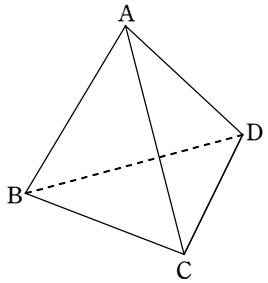
３年生　５章　図形と相似（重要問題）全国国公私立入試過去問より　※立体と重心、比例式、辺の比、文字、二次方程式の利用（２、７、１０私立対策）

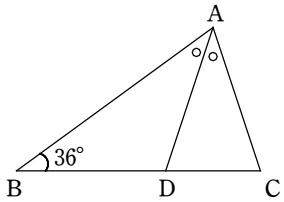
1 右の図のような正四面体 ABCD において，点 A から △BCD に垂線 AP をひき，点 B から △ACD に垂線 BQ をひくと，線分 AP と線分 BQ は 1 点で交わるので，その交点を O とする。
このとき，次の各問いに答えなさい。

(1)　AO : OP を求めなさい。

(2)　さらに，点 C から △ABD に垂線 CR をひき，点 D から △ABC に垂線 DS をひく。このとき，四面体 PQRS の体積は正四面体 ABCD の体積の何倍になるか求めなさい。

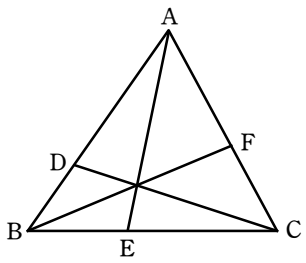


2 図のように，BA＝BC，∠B＝36° の二等辺三角形がある。
∠A の二等分線と線分 BC との交点を D とすると，CD の長さが 1 となった。このとき，線分 AD の長さを求めよ。

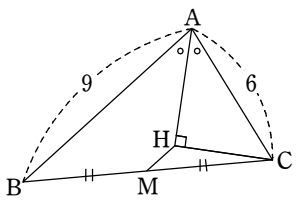


(　　)組(　　)番　名前(　　)

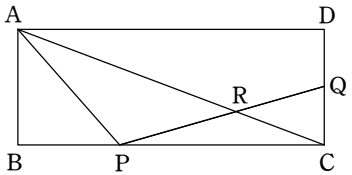
3 右の図で，AD : DB＝2 : 1，AF : FC＝4 : 3 であるとき，BE : EC を最も簡単な整数の比で表しなさい。



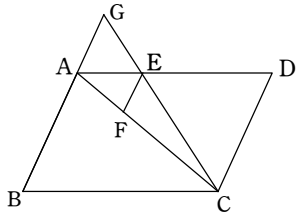
4 図の △ABC で，線分 MH の長さを求めよ。



5 右の図のように，長方形 ABCD があり，面積は 36 である。点 P は辺 BC 上にあり，点 Q は辺 CD の中点である。また，線分 AC と PQ との交点を R とする。三角形 ABP の面積が 6 であるとき，BP : PC＝ア［　　］，AR : RC＝イ［　　］である。



6 右の図のように，平行四辺形 ABCD があり，AB＝5 cm である。辺 AD 上に点 E を AB＝DE となるようにとり，点 E を通り直線 AB に平行な直線と対角線 AC との交点を F とすると，EF＝2 cm であった。また，2 点 C，E を通る直線と直線 AB との交点を G とする。



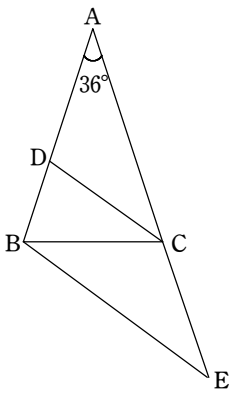
このとき，次の問い (1) ～ (3) に答えよ。

(1)　AF : FC を最も簡単な整数の比で表せ。

(2)　線分 AG の長さを求めよ。

(3)　点 D から直線 CE にひいた垂線と直線 CE との交点を H とするとき，△AEG と △BCH の面積の比を最も簡単な整数の比で表せ。

7 図のように，AB＝AC，∠BAC＝36° の二等辺三角形 ABC において，∠ACB の二等分線と AB との交点を D とすると，DB＝2 cm になります。また，点 B を通り DC に平行な直線と直線 AC との交点を E とします。



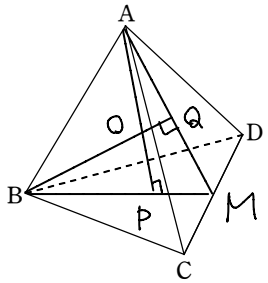
(1) 次の空欄をうめなさい。

∠CBE＝ア［　　］°，∠ADC＝イ［　　］°

(2) AD の長さを求めなさい。

(3) 四角形 DBEC の面積は，△DBC の面積の何倍ですか。

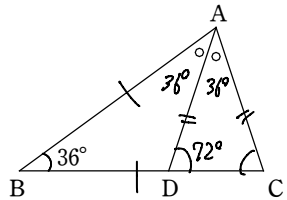
1 右の図のような正四面体 ABCD において，点 A から △BCD に垂線 AP をひき，点 B から △ACD に垂線 BQ をひくと，線分 AP と線分 BQ は 1 点で交わるので，その交点を O とする。
このとき，次の各問いに答えなさい。
(1) AO : OP を求めなさい。
(2) さらに，点 C から △ABD に垂線 CR をひき，点 D から △ABC に垂線 DS をひく。このとき，四面体 PQRS の体積は正四面体 ABCD の体積の何倍になるか求めなさい。



(1) 正四面体の頂点Aから底面BCDに垂線を下ろすと
Pは△BCDの重心となるので，BP : PM = 2 : 1
同様に AQ : QM = 2 : 1
よって AQ : QM = BP : PM より QP // AB，PQ : AB = 1 : 3
したがって AO : OP = AB : PQ = 3 : 1 //

(2) 四面体PQRSは PQ = QR = RS = SP より
正四面体で，A−BCDと相似となる。
相似比は PQ : CD = PQ : AB = 1 : 3
よって PQRSの体積は ABCD の体積の
$\frac{1}{3^3} = \frac{1}{27}$ 倍 //

2 図のように，BA＝BC，∠B＝36° の二等辺三角形がある。
∠A の二等分線と線分 BC との交点を D とすると，CD の長さが 1 となった。このとき，線分 AD の長さを求めよ。



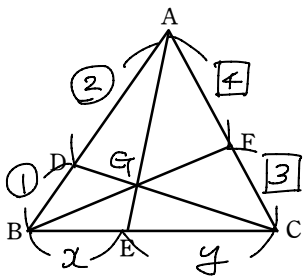
- △ABCは二等辺三角形なので
$\angle BAC = \angle BCA = \frac{180 - 36}{2} = 72°$
- ∠Aの二等分なので
∠BAD = ∠CAD = 72° ÷ 2 = 36°
となり △ABD は二等辺三角形となる。
- ∠ADC = ∠ACD = 72° なので △ADCは二等辺三角形。

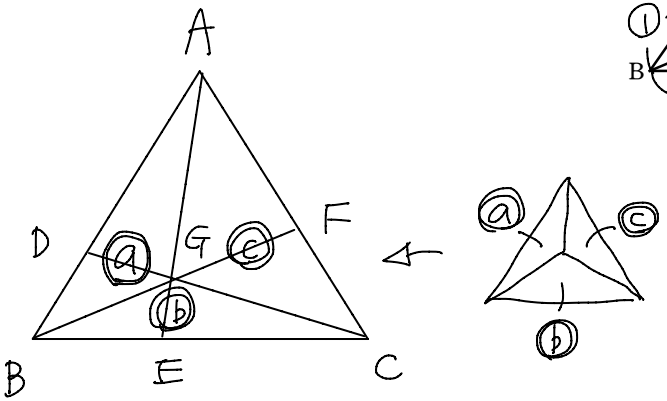
よって △ABC ∽ △CAD
BC : AD = AC : CD
ここで AD = AC = x とすると
$(x+1) : x = x : 1$
$x^2 = x + 1$
$x^2 - x - 1 = 0$
$x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

$x > 0$ より $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$
$AD = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ //

(　　)組(　　)番　名前(　　)

3 右の図で，AD : DB＝2 : 1，AF : FC＝4 : 3 であるとき，BE : EC を最も簡単な整数の比で表しなさい。





面積比を次のようにおく。 △ABG = a
△BGC = b
△AGC = c

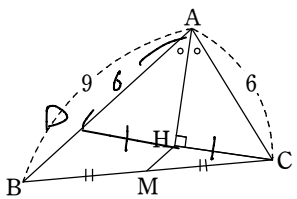
- a : b = AF : FC より
  a : b = 4 : 3 …①
- b : c = DB : AD より
  b : c = 1 : 2 …②

①、②より
a : c = 4 : 6 = 2 : 3

a : c =
BE : EC
= x : y

BE : EC
= 2 : 3 //

4 図の △ABC で，線分 MH の長さを求めよ。



- CHの延長線とABの交点をDとする。

△AHC ≡ △AHD である。

∠AHC = ∠AHD = 90°
∠HAC = ∠HAB
AH = AH

よって AD = 6 , DH = CH となり

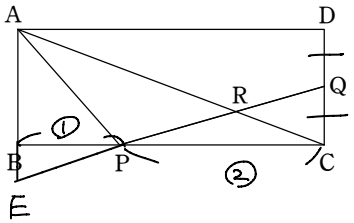
△CHM ∽ △CDB

DH = HC , BM = MC なので 中点連結定理
より DB // HM , HM = $\frac{1}{2}$DB

DB = AB − AD = 9 − 6 = 3

HM = $\frac{1}{2}$DB = $\frac{1}{2}$ × 3 = $\frac{3}{2}$ //

5 右の図のように，長方形 ABCD があり，面積は 36 である。点 P は辺 BC 上にあり，点 Q は辺 CD の中点である。また，線分 AC と PQ との交点を R とする。三角形 ABP の面積が 6 であるとき，BP : PC＝ア［　　］，AR : RC＝イ［　　］である。



(ア) △ABC の面積 は 長方形 ABCD の半分なので 18

△ABP = 6 より △APC = 12 なので △PQC = 6

$\triangle ABP = BP \times AB \times \frac{1}{2} = 6$ …①

$\triangle PQC = PC \times \frac{1}{2}AB \times \frac{1}{2} = 6$ …②

① より $BP = \frac{12}{AB}$　② より $PC = \frac{24}{AB}$

よって BP : PC = 12 : 24 = 1 : 2

(イ) AR : RC を含む相似な三角形は，AB と PQ を延長した交点 E を用いて △AER ∽ △CQR。

(ア) より BP : PC = 1 : 2 より △BEP ∽ △CQP で

$BE = \frac{1}{2}QC = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}AB) = \frac{1}{4}AB$ なので

$AE : CQ = \frac{5}{4} : \frac{1}{2} = 5 : 2$

よって AE : CQ = AR : RC = 5 : 2

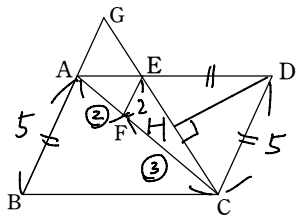
6 右の図のように，平行四辺形 ABCD があり，AB＝5 cm である。辺 AD 上に点 E を AB＝DE となるようにとり，点 E を通り直線 AB に平行な直線と対角線 AC との交点を F とすると，EF＝2 cm であった。また，2 点 C，E を通る直線と直線 AB との交点を G とする。

このとき，次の問い (1) ～ (3) に答えよ。

(1) AF : FC を最も簡単な整数の比で表せ。

(2) 線分 AG の長さを求めよ。

(3) 点 D から直線 CE にひいた垂線と直線 CE との交点を H とするとき，△AEG と △BCH の面積の比を最も簡単な整数の比で表せ。



(1) AF : AC = EF : DC なので

= 2 : 5 となり

AF : FC = 2 : 3

(2) △AGC ∽ △FEC より

AC : FC = AG : FE

5 : 3 = AG : 2

3AG = 10，AG = $\frac{10}{3}$ cm

(3) • △AEG ∽ △BCG の相似比を求めるため GE : GC を求める。

GE : EC = AF : FC

= 2 : 3 …1

よって GE : GC = 2 : 5 …2

• △EHD ≡ △CHD なので EH = HC

• $\triangle BCE = \frac{3}{5}\triangle BCG$ (1 より)

$\triangle BCH = \frac{1}{2}\triangle BCE$

よって

$\triangle BCH = \frac{3}{5} \times \frac{1}{2} \times \triangle BCG$

$= \frac{3}{10}\triangle BCG$ …3

• 2 より面積比は

△AEC : △BCG …4

$= 2^2 : 5^2 = 4 : 25$

3，4

$\triangle BCH = \frac{3}{10} \times \frac{25}{4}\triangle AEG$

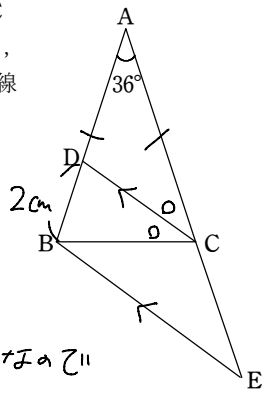
7 図のように，AB＝AC，∠BAC＝36° の二等辺三角形 ABC において，∠ACB の二等分線と AB との交点を D とすると，DB＝2 cm になります。また，点 B を通り DC に平行な直線と直線 AC との交点を E とします。

(1) 次の空欄をうめなさい。

∠CBE＝ア［　　］°，∠ADC＝イ［　　］°

(2) AD の長さを求めなさい。

(3) 四角形 DBEC の面積は，△DBC の面積の何倍ですか。



(1) ∠ACB は AB=AC の二等辺三角形なので

(180−36)÷2 = 72°。∠DCB は ∠ACB の

二等分なので ∠DCB = 72°÷2 = 36°

- ∠CBE は DC∥BE の錯角で等しいので 36°
- ∠ADC = ∠ABC + ∠DCB = 72°+36° = 108°

(2) △ABC ∽ △CBD なので AD = x とおくと，

AB : CB = BC : BD　　AD = BC

(x+2) : x = x : 2

$x^2 = 2(x+2)$

$x^2 - 2x - 4 = 0$

$x = 1 \pm \sqrt{5}$　x>0 より

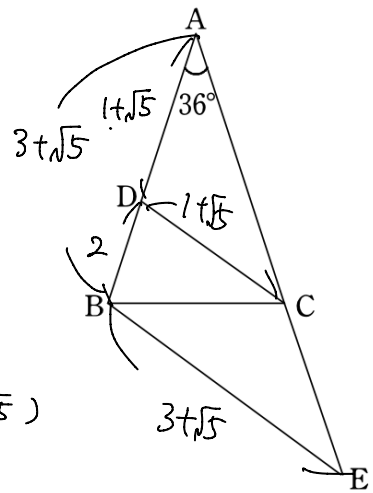
AD = $1+\sqrt{5}$ cm

(3) DC = AD = $1+\sqrt{5}$

BE = AB = $3+\sqrt{5}$

△DBC : △BEC

= DC : BE なので



△DBC : □DBEC

= $1+\sqrt{5}$: $(1+\sqrt{5}+3+\sqrt{5})$

= $1+\sqrt{5}$: $4+2\sqrt{5}$

何倍？

- $\dfrac{4+2\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} = \dfrac{2(2+\sqrt{5})}{1+\sqrt{5}} = \dfrac{2(2+\sqrt{5})(1-\sqrt{5})}{(1+\sqrt{5})(1-\sqrt{5})}$

$= \dfrac{2(2-2\sqrt{5}+\sqrt{5}-5)}{1-5} = \dfrac{2(-3-\sqrt{5})}{-4}$

$= \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$